

# 用 NILT 导出的传输线瞬态分析模型

郭裕顺

(杭州电子工业学院, 浙江杭州 310037)

摘要: K Singhal 与 J Vlach 的 NILT (数值 Laplace 反变换) 技术是端接线性负载传输线分析的一种有效方法. 本文利用这一 NILT 技术, 导出了传输线的时域离散模型, 由此可进行端接任意负载传输线的瞬态分析. 这一模型毋须象通常的频域方法那样对传输线作有理逼近, 因而不存在由此带来的数值问题, 而计算量与它们相当. 文中分别给出了均匀与非均匀传输线的处理, 并用实例作了验证.

关键词: 传输线分析; VLSI 互连线; 数值 Laplace 反变换

中图分类号: TN454 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2002) 03-0381-05

## Transmission Line Model for Transient Simulation Derived Using the NILT Technique

GUO Yur shun

(Hangzhou Institute of Electronics Engineering, Hangzhou, Zhejiang 310037, China)

Abstract: K Singhal & J Vlach's NILT (Numerical Inversion of Laplace Transform) method is an efficient approach to the transient analysis of lossy transmission lines terminated with linear loads. This technique is utilized in this paper to derive a discrete time model for transmission lines. The model thus obtained can be easily implemented in general circuit simulators, so that the transient simulation for arbitrary loaded transmission lines can be readily accomplished. Unlike the prevailing frequency domain methods employing the moment matching technique, no rational approximation is required in this method and numerical problems thus aroused such as stability and preserving of the passivity are avoided. Both uniform and nonuniform lines are dealt with. Numerical experiments carried out by implementing the model into the circuit simulator SPICE have been performed and the results demonstrate the validity and efficiency of the method.

Key words: transmission line analysis; VLSI interconnects; NILT

### 1 引言

对一般含传输线的电路进行瞬态分析, 主要的方法是设法获得传输线的时域离散等效模型, 然后将这一模型实现在如 SPICE 这样的数值电路模拟器中. 目前已有多种方法来获得这样的模型. 最普遍的做法是从传输线的频域特性描述出发, 通过有理逼近如 AWE、PVL、PRIMA<sup>[2-4]</sup> 等算法, 或通过电报方程的 Chebyshev 展开<sup>[5]</sup>, 将在时域中用偏微分方程描述的分布参数系统近似为用常微分方程描述的集中参数系统. 再用数值积分获得这一离散等效模型. 也可在时域中通过对电报方程的离散, 如沿特征线的离散<sup>[6]</sup>, 直接对方程中时间变量<sup>[7]</sup> 或时空变量的离散<sup>[8]</sup>, 来获得这种模型.

本文给出了获得这种模型的一个新方法. 这一方法利用了 K Singhal 与 J Vlach 的 NILT 技术, 从含初始电压电流分布的传输线频域解出发, 导出其在某一时间点的等效模型. 与目前采用有理逼近的频域方法相比, 这一方法的最大特点, 是不需要对无理的传输线特性函数作有理逼近, 也就不会出现任

何数值上的困难(如稳定性/无源性的破坏), 而模型的计算量与它们相当. 文[1]的 NILT 技术是分析端接线性负载传输线的有效方法. 通过本文的工作, 说明这一 NILT 方法也可用于端接非线性负载传输线的分析. 下面我们先指出这一 NILT 技术用来导出任一动态元件的时域离散等效模型, 然后将这一过程用于传输线, 分别给出均匀与非均匀传输线的离散模型. 最后用实例说明模型的应用效果.

### 2 导出动态元件离散模型的 NILT 方法

设  $v(t)$  的拉氏变换为  $V(s)$ . 文献[1]给出的 NILT 方法如下:

$$v(t) = -\frac{1}{t} \sum_{i=1}^M K_i V\left(\frac{z_i}{t}\right) \quad (1)$$

$z_i, K_i$  分别是  $e^s$  的 Pade 逼近的极点与留数,  $M$  是极点个数. 当 Pade 逼近为  $(M, N)$  阶时, 上式给出的  $v(t)$  有  $M+N$  阶精度.

即与其 Taylor 展开的前  $M+N+1$  项相符. 这一技术最初用于线性电路的瞬态分析, Nakhla 等对其在线性传输线电路分析中的应用作过广泛研究<sup>[9-12]</sup>. 在这些应用中, 先要在  $s$  域中的  $M$  个复频率点上求解电路方程, 再按式(1)计算时域响应.

下面说明这一 NILT 技术还可用来导出各种线性动态元件的瞬态分析离散模型. 先以简单电容为例说明方法的思想. 考虑电路瞬态分析过程中两个相邻的时间点  $t_n, t_{n+1}$ , 对应的电容电压电流分别为  $v_n, v_{n+1}, i_n, i_{n+1}$ . 设已完成对  $t_n$  点的分析, 将此时的状态视作初始状态, 则在  $s$  域中有

$$V(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{v_n}{s} \quad (2)$$

假定  $i(t)$  在  $(t_n, t_{n+1})$  间是线性的, 则

$$I(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{hs^2}\right) i_n + \frac{1}{hs^2} i_{n+1} \quad (3)$$

$h = t_{n+1} - t_n$ , 对式(2)作 NILT:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= -\frac{1}{h} \sum_{i=1}^M K_i \left\{ \frac{h}{Cz_i} \left[ \left(\frac{h}{z_i} - \frac{h}{z_i^2}\right) i_n + \frac{h}{z_i^2} i_{n+1} \right] + \frac{hv_n}{z_i} \right\} \\ &= -\sum_{i=1}^M \left[ \frac{K_i}{z_i^2} - \frac{K_i}{z_i^3} \right] \cdot \frac{hi_n}{C} - \sum_{i=1}^M \frac{K_i}{z_i^3} \cdot \frac{hi_{n+1}}{C} - \sum_{i=1}^M \frac{K_i}{z_i} \cdot v_n \end{aligned} \quad (4)$$

由于对  $M+N$  阶的 NILT, 有<sup>[1]</sup>

$$\sum_{i=1}^M \frac{K_i}{z_i^m} = -\frac{1}{(m-1)!}, \quad m = 1, 2, \dots, M+N+1 \quad (5)$$

因此只要在式(4)中应用高于二阶的 NILT, 就有

$$v_{n+1} = \frac{h}{2C} (i_n + i_{n+1}) + v_n \quad (6)$$

此即梯形公式. 类似地若假定  $i(t)$  在  $(t_n, t_{n+1})$  间是常数, 可导出 Euler 公式, 而对  $t_{n+1}$  之前的多个点作高次插值, 将得到高阶公式.

上述结果与通常的数值积分公式相同. 但对一般的动态系统, NILT 给出的模型具有更高的精度. 为此考察如下二阶系统

$$x' + \lambda x = u \quad (7)$$

用 NILT 方法导出的模型. 以  $t_n$  作为起始时间, 在频域中有:

$$X(s) = \frac{x_n + u(s)}{s + \lambda} \quad (8)$$

因此

$$x_{n+1} = -\frac{1}{h} \sum_{i=1}^M \frac{K_i}{z_i/h + \lambda} \left[ x_n + \left(\frac{h}{z_i} - \frac{h}{z_i^2}\right) u_n + \frac{h}{z_i^2} u_{n+1} \right] \quad (9)$$

而精确模型是

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= e^{-\lambda h} x_n + \int_0^h e^{-\lambda(h-\tau)} u(\tau) d\tau \\ &= e^{-\lambda h} x_n - \frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda h} - \frac{1-e^{-\lambda h}}{\lambda h}) u_n + \frac{1}{\lambda} (1 - \frac{1-e^{-\lambda h}}{\lambda h}) u_{n+1} \end{aligned} \quad (10)$$

式(9)的第一项=

$$-x_n \sum_{i=1}^M \frac{K_i/z_i}{1+h\lambda/z_i} = x_n \left[ -\sum_{i=1}^M \frac{K_i}{z_i} + h\lambda \sum_{i=1}^M \frac{K_i}{z_i^2} - (h\lambda)^2 \sum_{i=1}^M \frac{K_i}{z_i^3} + \dots \right]$$

若 NILT 的阶为  $p = M+N$ , 则上式=

$$x_n \left[ 1 - h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2!} - \frac{(h\lambda)^3}{3!} + \dots + \frac{(-h\lambda)^p}{p!} + O((h\lambda)^{p+1}) \right]$$

这是  $x_n e^{-h\lambda}$  的  $p$  阶解. 不难证明式(9)的其余两项也分别是式(10)中对应项的  $p$  阶解. 可见这时 NILT 给出的模型精度是  $p$  阶的.

注意上述高阶模型是单步的, 而通常在电路模拟中只有多步公式(Gear 算法)才能获得高阶模型, 除非采用 Runge-Kutta 算法. 但 Runge-Kutta 算法是非线性显式的, 稳定区域有限, 而很高阶的 NILT 仍是绝对稳定的<sup>[1]</sup>. 这样我们得到了一种动态系统离散化的新方法, 下面用它来导出传输线的离散模型.

### 3 传输线的瞬态模型

#### 3.1 均匀传输线

分布有初始电压电流  $v_0(x), i_0(x)$  的均匀传输线的电报方程是:

$$\frac{dV(x, s)}{dx} = -(R + sL)I(x, s) + Li_0(x) \quad (12)$$

$$\frac{dI(x, s)}{dx} = -(G + sC)V(x, s) + Cv_0(x)$$

其解为

$$\begin{aligned} V(x) + Z_0 I(x) &= e^{-\gamma x} (V_1 + Z_0 I_1) + \int_0^x [Li_0(u) + Z_0 Cv_0(u)] \\ &\quad \cdot e^{-\gamma(x-u)} du \\ V(x) - Z_0 I(x) &= e^{-\gamma(l-x)} (V_2 + Z_0 I_2) - \int_x^l [Li_0(u) \\ &\quad - Z_0 Cv_0(u)] e^{-\gamma(l-u)} du \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $Z_0 = Z_0(s) = \sqrt{\frac{R+sL}{G+sC}}$ ,  $\gamma = \gamma(s) = \sqrt{(R+sL)(G+sC)}$ . 分别令  $x = 0, l$ , 可得:

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_0 I_1 + e^{-\gamma l} (V_2 + Z_0 I_2) - \int_0^l [Li_0(u) - Z_0 Cv_0(u)] e^{-\gamma u} du \\ V_2 &= Z_0 I_2 + e^{-\gamma l} (V_1 + Z_0 I_1) - \int_0^l [Li_0(u) + Z_0 Cv_0(u)] \\ &\quad \cdot e^{-\gamma(l-u)} du \end{aligned} \quad (14)$$

$l$  是传输线长度,  $V_1, I_1, V_2, I_2$  分别是始端与终端电压电流的拉氏变换.

同样考虑两个相邻的时间点  $t_n, t_{n+1}$ , 视  $t_n$  时的状态为初始状态, 记  $i_n(x) = i(x, t_n), v_n(x) = v(x, t_n)$ , 则有

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_0 I_1 + e^{-\gamma l} (V_2 + Z_0 I_2) - \int_0^l [Li_n(u) - Z_0 C v_n(u)] e^{-\gamma u} du \\ V_2 &= Z_0 I_2 + e^{-\gamma l} (V_1 + Z_0 I_1) + \int_0^l [Li_n(u) + Z_0 C v_n(u)] \\ &\quad \cdot e^{-\gamma(l-u)} du \end{aligned} \quad (15)$$

仍假定  $i_1, i_2$  在相邻时间点间是线性的, 因此

$$I_1(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{hs^2}\right) i_{1,n} + \frac{1}{hs^2} i_{1,n+1}, \quad I_2(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{hs^2}\right) i_{2,n} + \frac{1}{hs^2} i_{2,n+1}$$

$i_{k,n} = i_k(t_n), i_{k,n+1} = i_k(t_{n+1}), k = 1, 2$ . 对式(15)应用 NILT, 有

$$\begin{aligned} v_{1,n+1} &= -\frac{1}{h} \sum_{i=1}^M K_i V_1\left(\frac{z_i}{h}\right) = z_{h1} i_{1,n+1} + z_{h2} i_{2,n+1} + w v_{2,n+1} \\ &\quad + e_{1,n+1} \end{aligned}$$

$$v_{2, n+1} = -\frac{1}{h} \sum_{i=1}^M K_i V_2\left(\frac{z_i}{h}\right) = z_{h2} i_{1, n+1} + z_{h1} i_{2, n+1} + w v_{1, n+1} + e_{2, n+1} \quad (16)$$

这里

$$\begin{aligned} z_{h1} &= -\sum_{i=1}^M \left[ K_i Z_0\left(\frac{z_i}{h}\right) \frac{1}{z_i^2} \right], \quad z_{h2} = -\sum_{i=1}^M \left[ K_i e^{-\gamma(z_i/h)l} Z_0\left(\frac{z_i}{h}\right) \frac{1}{z_i^2} \right], \quad w = -\sum_{i=1}^M \left[ K_i e^{-\gamma(z_i/h)l} \frac{1}{z_i^2} \right], \\ e_{1, n+1} &= -\frac{1}{h} \sum_{i=1}^M K_i \left\{ \begin{aligned} &Z_0\left(\frac{z_i}{h}\right) \left(\frac{h}{z_i} - \frac{h}{z_i^2}\right) i_{1, n+1} e^{-\gamma(z_i/h)l} \left(\frac{h}{z_i} - \frac{h}{z_i^2}\right) \left( v_{2, n+1} + Z_0\left(\frac{z_i}{h}\right) i_{2, n+1} \right) \\ &- \int_0^l [L i_n(u) - Z_0\left(\frac{z_i}{h}\right) C v_n(u)] e^{-\gamma(z_i/h)u} du \end{aligned} \right\}, \\ e_{2, n+1} &= -\frac{1}{h} \sum_{i=1}^M K_i \left\{ \begin{aligned} &Z_0\left(\frac{z_i}{h}\right) \left(\frac{h}{z_i} - \frac{h}{z_i^2}\right) i_{2, n+1} e^{-\gamma(z_i/h)l} \left(\frac{h}{z_i} - \frac{h}{z_i^2}\right) \left( v_{1, n+1} + Z_0\left(\frac{z_i}{h}\right) i_{1, n+1} \right) \\ &+ \int_0^l [L i_n(u) + Z_0\left(\frac{z_i}{h}\right) C v_n(u)] e^{-\gamma(z_i/h)(l-u)} du \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

其中  $v_{k, n} = v_k(t_n)$ ,  $v_{k, n+1} = v_k(t_{n+1})$ ,  $k = 1, 2$ . 式(16)即是传输线的瞬态分析离散模型. 当  $\tau = \sqrt{LQ} \gg h$  时, 上述模型还可简化, 式(16)中的  $w$ ,  $z_{h2}$  及  $e_{1, n+1}$ ,  $e_{2, n+1}$  中的第二项均可忽略. 这些项代表线一端电压电流对另一端的影响, 因传输延时, 一端的电压电流要经过  $\tau$  秒之后才会对另一端产生影响, 当  $\tau \gg h$  时, 这些项变换到时域中后近似为零.

模型应用时首先按式(16)进行传输线对电路方程贡献的装配, 然后从电路方程求得整个电路的解. 装配时需用数值方法计算式(17)中的积分项, 为此可将传输线分成若干段并假定线上的电压电流是分段线性的, 这样积分便可算出. 完成当前时间点的分析后, 再从式(13)用 NILT 求出线上各分段点的电压电流, 即传输线当前的状态, 以便下一时间点分析时使用.

对均匀耦合传输线, 由于存在如式(13)、(14)的解析解, 上述过程可直接应用, 这里不再赘述. 下面考虑非均匀线.

### 3.2 非均匀传输线

这时电报方程式(12)中 RLCG 为随  $x$  变化的参数, 方程不再存在解析解, 为此要用数值方法. 通常的做法是将其中对  $x$  的微分离散化, 这一离散可采用多种方式. 简单的如将线均匀分段后用差分近似微分, 复杂一些可采用文献[8]的 compact difference 或沿线作 Chebyshev 展开<sup>[5]</sup>. 我们采用 Chebyshev 展开法. 离散化后电报方程成为:

$$\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = -s \begin{bmatrix} 0 & L \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & R \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L i_0 \\ C v_0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} V &= [V_0 \quad V_1 \quad \dots \quad V_M]^T, \quad I = [I_0 \quad I_1 \quad \dots \quad I_M]^T, \\ R &= \frac{l}{2} \text{diag}\{R_0 \quad \dots \quad R_M\}, \quad L = \frac{l}{2} \text{diag}\{L_0 \quad \dots \quad L_M\}, \\ C &= \frac{l}{2} \text{diag}\{C_0 \quad \dots \quad C_M\}, \quad G = \frac{l}{2} \text{diag}\{G_0 \quad \dots \quad G_M\}, \end{aligned}$$

$v_0 = [v_{0,0} \quad v_{0,1} \quad \dots \quad v_{0,M}]^T$ ,  $i_0 = [i_{0,0} \quad i_{0,1} \quad \dots \quad i_{0,M}]^T$ ,  $D$  的表达可参看文献[5], 不在这里列出. 各参量的下标指线上不同位置处相应参量的值, 如  $V_k = V(x_k)$ ,  $v_{0,k} = v_0(x_k)$ ,  $x_k = (1 + \cos(\pi k/M)) \cdot l/2$ ,  $x_M = 0$  是传输线的始端,  $x_0 = l$  是传输线的终端,  $M$  是 Chebyshev 逼近的阶. 由式(18)可得到传输线的频域模型. 文献[5]给出了一种方法. 本文不采用这一

方法, 而是先导出与均匀时式(13)、(14)对应的解, 再得出与式(15)、(16)平行的模型. 为此, 将  $L, C$  组成的矩阵对角化:

$$\begin{bmatrix} 1 & z_0 \\ 1 & -z_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & L \\ C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y_0 & -y_0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad (19)$$

这里

$$\begin{aligned} z_0 &= \text{diag}\{z_{0,0} \quad z_{0,1} \quad \dots \quad z_{0,M}\}, \\ \gamma &= \text{diag}\{\gamma_0 \quad \gamma_1 \quad \dots \quad \gamma_M\} \end{aligned}$$

$z_{0,k} = \sqrt{L(x_k)/C(x_k)}$ ,  $\gamma_k = \sqrt{L(x_k)C(x_k)} \cdot l/2$ ,  $\gamma_0 = z_0^{-1}$ ,  $1$  是单位阵. 利用式(19)、(18)可变换为:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ D_2 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_+ z_0 I \\ V_- z_0 I \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \cdot 1 + \alpha & -\beta \\ -\beta & s \cdot 1 + \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_+ z_0 I \\ V_- z_0 I \end{bmatrix} &+ \\ \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 + z_0 i_0 \\ v_0 - z_0 i_0 \end{bmatrix} & \end{aligned} \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{2}(D + z_0 D \gamma_0), \quad D_2 = \frac{1}{2}(D - z_0 D \gamma_0) \\ \alpha &= \frac{1}{2}(R L^{-1} + G C^{-1}), \quad \beta = \frac{1}{2}(R L^{-1} - G C^{-1}) \end{aligned}$$

这一方程组的阶是  $2(M+1) \times 2(M+1)$ , 为了能与边界条件一起求得解. 要从中去掉两个方程. 由于当线均匀无耗时,  $V_+ z_0 I$ ,  $V_- z_0 I$  分别是正向波与反向波, 且  $D_1 = D$ ,  $D_2 = 0$ ,  $\alpha = \beta = 0$ , 式(20)分裂为两个独立的方程组:

$$\begin{aligned} D(V_+ z_0 I) &= -s \gamma (V_+ z_0 I) + \gamma (v_0 + z_0 i_0) \\ D(V_- z_0 I) &= s \gamma (V_- z_0 I) - \gamma (v_0 - z_0 i_0) \end{aligned} \quad (21)$$

这时显然应去掉正向波方程组中对应始端的最后一个方程与反向波方程组中对应终端的第一个方程, 方可从中分别得到正向波如式(13)的解. 因此, 对式(20)亦类似地去掉前半部分方程组的最后一个方程与后半部分方程组的第一个方程, 并将其中与始端的  $V_{M+1} z_0 I$  及终端的  $V_0 - z_0 I_0$  相关的项移到右边, 这样得到:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (D_1 + s \gamma + \alpha \gamma)_{(1:M, 1:M)} & (D_2 - \gamma \beta)_{(1:M, 2:M+1)} \\ (D_2 + \gamma \beta)_{(2:M+1, 1:M)} & (D_1 - s \gamma - \alpha \gamma)_{(2:M+1, 2:M+1)} \end{bmatrix} \\ \cdot \begin{bmatrix} (V_+ z_0 I)_{(1:M)} \\ (V_- z_0 I)_{(2:M+1)} \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} -D_{1(1:M, M+1)} & -(D_2 - \gamma \beta)_{(1:M, 1)} \\ -(D_2 + \gamma \beta)_{(2:M+1, M+1)} & -D_{1(2:M+1, 1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{M+1} z_0 I \\ V_0 - z_0 I_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$+ \begin{bmatrix} Y_{(1:M, :)}(v_{0+} z_0 i_0) \\ - Y_{(2: M+ 1, :)}(v_0 - z_0 i_0) \end{bmatrix} \quad (22)$$

各矩阵的下标  $(i: k, j: l)$  表示由其中  $i$  到  $k$  行、 $j$  到  $l$  列组成的子矩阵, 单独的: 表示全部行或列. 由此方程可得  $V_k + z_0, k$   $I_k, k = 0, \dots, M - 1$ , 与  $V_k - z_0, M_k, k = 1, \dots, M$  的解, 将它们写为:

$$\begin{bmatrix} V_k + z_0, M_k \\ V_k - z_0, M_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{k, 11} & H_{k, 12} \\ H_{k, 21} & H_{k, 22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{M+} z_0, M M \\ V_0 - z_0, 0 I_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{k, 11} & F_{k, 12} \\ F_{k, 21} & F_{k, 22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 + z_0 i_0 \\ v_0 - z_0 i_0 \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, M - 1 \quad (23)$$

及

$$\begin{bmatrix} V_M - z_0, M M \\ V_0 + z_0, 0 I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{M, 1} & H_{M, 2} \\ H_{0, 1} & H_{0, 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{M+} z_0, M M \\ V_0 - z_0, 0 I_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{M, 1} & F_{M, 2} \\ F_{0, 1} & F_{0, 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 + z_0 i_0 \\ v_0 - z_0 i_0 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

式(23)、(24)就是与均匀时式(13)、(14)对应的解. 同样将  $t_n$  时的状态视作初始状态, 对式(24)作 NILT:

$$\begin{bmatrix} v_{1, n+1} - z_{01} i_{1, n+1} \\ v_{2, n+1} - z_{02} i_{2, n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{H} \cdot \begin{bmatrix} v_{1, n+1} + z_{01} i_{1, n+1} \\ v_{2, n+1} + z_{02} i_{2, n+1} \end{bmatrix} + \mathbf{W}_n \quad (25)$$

其中

$$\mathbf{H} = - \sum_{i=1}^M \frac{K_i}{z_i^2} \begin{bmatrix} H_{M, 1} & H_{M, 2} \\ H_{0, 1} & H_{0, 2} \end{bmatrix}_i$$

$$\mathbf{W}_n = - \frac{1}{h} \sum_{i=1}^M K_i \left\{ \left( \frac{h}{z_i} - \frac{h}{z_i^2} \right) \begin{bmatrix} H_{M, 1} & H_{M, 2} \\ H_{0, 1} & H_{0, 2} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} v_{1, n} + z_{01} i_{1, n} \\ v_{2, n} + z_{02} i_{2, n} \end{bmatrix} \right.$$

矩阵的下标  $i$  表示式(22)当  $s = z_i/h$  时的解. 式(25)即是非均匀线的瞬态模型.

非均匀耦合线的处理完全与此类似, 只需将上述过程中有关的量用矩阵与矢量替代, 我们不再作详细推导. 模型应用时也与均匀线的情形类似, 按式(25)进行电路方程的装配, 完成一个时间点的分析后再用式(23)求出各 Chebyshev 分点处的电压电流. 与文献[5]的模型相比, 首先我们的模型是端口模型, 不会增大电路规模, 因此更为有效, 而文献[5]的模型中牵涉线上各分点的电压电流; 其次, 用 NILT 可得到高阶模型, 对精度有较高要求时更为方便.

### 4 数值例子

下面我们给出两个例子来说明上述模型的应用效果.

例 1 电路如图 1(a) 所示. 耦合线参数  $R_{11} = R_{22} = 100\Omega, R_{12} = R_{21} = 0, L_{11} = L_{22} = 312\text{nH}, L_{12} = L_{21} = 100\text{nH}, C_{11} = C_{22} = 108\text{pF}, C_{12} = C_{21} = -19\text{pF}, G_{11} = G_{12} = G_{21} = G_{22} = 0$ , 线长  $0.3\text{cm}$ . 激励信号为上升/下降时间  $0.2\text{ns}$ 、宽度  $10\text{ns}$  的脉冲. 用上述模型分析所得结果如图 1(b)、(c) 所示,  $p = 1, 2$  分别表示用一阶 ( $M = 1, N = 0, K_1 = -1, z_1 = 1$ )、两阶 ( $M = 2, N = 0, K_1 = -2i, z_1 = 1 + i$ ) NILT 的模型. 这一结果是通过将模型实现在 SPICE2G5 中得出的, 分析中最大时间步长 =  $0.04\text{ns}$ . 图中同时示出了用一个商用 SPICE 模拟得到的结果, 可见两阶的 NILT 模型与之完全吻合.

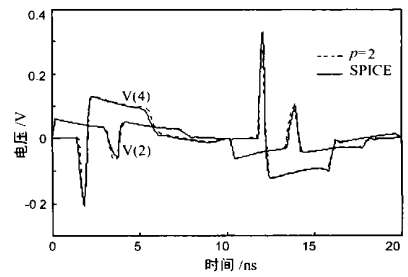
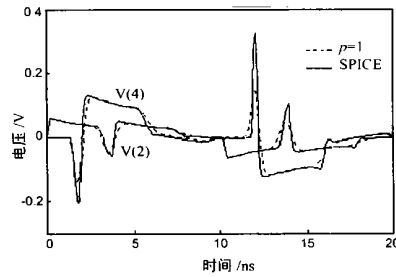


图 1(a) 耦合线电路. 二极管饱和电流  $I_s = 10^{-6}\text{A}$

图 1(b) 用一阶模型分析的结果

图 1(c) 二阶模型的分析结果

例 2 电路如图 2(a) 所示, 为端接电阻的如下非均匀传输线

$$\frac{dV(x, s)}{dx} = - (R + sL)(1 + \alpha)^2 I(x, s)$$

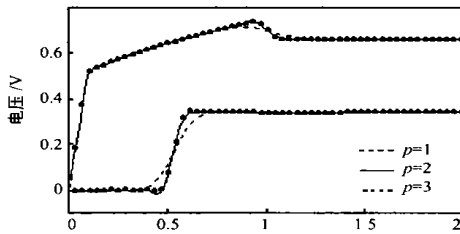
$$\frac{dI(x, s)}{dx} = - sC(1 + \alpha)^{-2} V(x, s)$$

参数  $R = 0.35\Omega/\text{mm}, Z_0 = \sqrt{L/C} = 53\Omega, 1/\sqrt{LC} = 2 \times 10^8\text{mm}/\text{sec}, 1 + \alpha l = \sqrt{2}, l = 96.8\text{mm}$  为线长. 激励为上升时间  $0.1\mu\text{s}$  的阶跃, 结果如图 2(b) 所示.  $p = 1, 2, 3$  分别表示一、二、三阶 ( $M = 2, N = 1, K_1 = 2 - 5\sqrt{2}i, z_1 = 2 + \sqrt{2}i$ ) 的 NILT 模型, 可见二、三阶的结果几乎完全吻合. 分析中所用 Chebyshev 逼近的阶 = 16, 时间步长  $h = 12\text{ns}$ .

从上述两例可以看出, 用一阶的 NILT 模型结果有一定的误差, 而两阶的 NILT 模型就能给出足够精确的结果, 这与通



(a) 端接电阻的非均匀线



(b) 传输线源端与负载端的波形

图 2(b) 图 2(a) 传输线源端与负载端的波形

常电路模拟中只需使用两阶的数值积分公式(梯形公式)这一原则一致. 一般情况亦是如此, 我们已分析过的各例高于两阶的模型结果差别均不大, 虽然三阶的模型并不增加计算量(也只需在一个复频率上计算).

## 5 结论

本文首先指出文献[1]的 NILT 技术可用来进行动态元件的离散化. 对基本的集中参数电容电感, 这样导出的结果与通常的数值微分方法相同, 但对一般的动态系统, 却可得到精度更高的结果. 将其用于传输线的离散化, 可十分方便地得到瞬态分析所需模型. 我们给出了均匀与非均匀传输线的的离散伴随模型, 及实现在 SPICE 中的结果. 对更一般的参数随频率变化的传输线, 这一方法的应用也是可能的.

## 参考文献:

- [ 1 ] K Singhal, J Vlach. Computation of time domain response by numerical inversion of the Laplace transform [ J ]. J. Franklin Inst. , 1975, 299: 109- 126.
- [ 2 ] J E Bracken, U Raghavan, R A Rohrer. Interconnect simulation with asymptotic waveform evaluation(AWE) [ J ]. IEEE Trans. CAS, 1992, 39(11): 869- 878.
- [ 3 ] M Celik, A C Cangellaris. Simulation of dispersive multiconductor transmission lines by Pade approximation via the Lanczos process [ J ]. IEEE Trans. MITT, 1996, 44(12): 2525- 2535.
- [ 4 ] A Odabasioglu, M Celik, L T Pileggi. PRIMA: Passive reduced order interconnect macromodeling algorithm [ J ]. IEEE Trans. CAD, 1998, 17( 8 ): 645- 653.
- [ 5 ] M Celik, et al. An all purpose transmission line model for interconnect simulation in SPICE [ J ]. IEEE Tran. MITT, 1997, 45( 10 ): 1857 - 1867.
- [ 6 ] J F Mao, E S Kuh. Fast simulation and sensitivity analysis of lossy transmission lines by the method of characteristics [ J ]. IEEE Trans. CAS I, 1997, 44( 5 ): 391- 401.
- [ 7 ] Guo Yushun. Transient analysis of transmission line circuits based on the semidiscretization of telegrapher equations [ J ]. J. of Electronics ( CHINA ), 2001, 18( 1 ): 46- 55
- [ 8 ] 郭裕顺. 传输线瞬态分析中基于电报方程时-空离散的有效方法 [ J ]. 电子学报, 2001, 29(3): 373- 377.
- [ 9 ] J R Griffith, M S Nakhla. Time domain analysis of lossy coupled transmission lines [ J ]. IEEE Trans. MITT, 1990, 38( 10 ): 1480- 1487.
- [ 10 ] Linchao Lu, M S Nakhla, Q J Zhang. A resetting algorithm for transient analysis of coupled transmission line circuits [ J ]. IEEE Trans. MITT, 1994, 42(3): 494- 500.
- [ 11 ] S L Manney, M S Nakhla, Q J Zhang. Analysis of nonuniform, frequency-dependent high speed interconnects using numerical inversion of Laplace transform [ J ]. IEEE Trans. CAD, 1994, 13( 12 ): 1513- 1525.
- [ 12 ] 毛军发, 李征帆. 传输线时域响应分析中的改进型 NILT 方法 [ J ]. 电子学报, 1995, 23( 3 ): 55- 57.
- [ 13 ] A C Cangellaris, et al. Electromagnetic model order reduction for system level modeling [ J ]. IEEE Trans. MITT, 1999, 47(6): 840- 850.

## 作者简介:



郭裕顺 男. 1965 年 10 月生于浙江富阳. 1984 年毕业于杭州电子工业学院, 1986 年获成都电讯工程学院硕士学位. 现在杭州电子工业学院微电子 CAE 研究所工作, 教授, 目前主要从事微波与高速集成电路 CAD 研究.